ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTA : *Les candidats sont priés de conserver le numérotage des questions et des relations, tel qu'il est donné dans l'énoncé. Les parties* I, II *et* III *peuvent être abordées indépendamment.*

λ désigne une constante strictement positive, et x la variable réelle. L'application y réelle, $x \longmapsto y(x)$, est définie par : $y(x) = \dfrac{1}{x^2 + \lambda^2}$. On désigne ses dérivées par rapport à x, d'ordres 1, 2, 3, ..., n, ... par $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}, \ldots$ respectivement.

$P_n(x)$ est la valeur de la fonction polynôme associée à un polynôme P_n ; afin de soulager l'écriture, on pourra écrire P_n pour $P_n(x)$, quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

I

1° Calculer $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$.

2° Construire sommairement le graphe (C) de y, dans un repère cartésien orthonormé (on pourra construire (C) en prenant $\lambda = 1$, et 2 cm pour unité de longueur).

3° Calculer les aires suivantes (pour λ positif quelconque) :

a. Aire A du domaine limité par la courbe (C) et son asymptote;

b. Aire B du domaine limité par l'arc de (C) compris entre les deux points d'inflexion, les parallèles à Oy menées par ces points, et la portion de l'asymptote qu'elles découpent;

c. Aire C du domaine analogue au précédent, correspondant à l'arc de (C) qui a pour extrémités les points où y'' atteint son maximum.

4° On pose :

$$y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!\, P_n(x)}{(x^2+\lambda^2)^{n+1}} \quad \text{avec } P_0(x) = 1, \text{ en convenant que } y^{(0)} = y.$$

a. Calculer $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$.

b. Quelle relation (1) y a-t-il entre $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$ et $P'_n(x)$?

c. Montrer que P_n est un polynôme réel de degré n.

d. Calculer le monôme dominant de P_n (c'est-à-dire celui dont le degré est le plus élevé).

e. Étudier la parité des polynômes P_n.

5° On rappelle la formule de Leibniz, qui donne la dérivée d'ordre n du produit uv de deux fonctions, et dont la démonstration n'est pas demandée :

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \ldots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots + u v^{(n)}$$

En l'utilisant convenablement, établir la relation :

$$(x^2 + \lambda^2) y^{(n)} + 2nxy^{(n-1)} + (n-1) n y^{(n-2)} = 0. \tag{2}$$

6° En déduire la relation :

$$P_n - 2x P_{n-1} + (x^2 + \lambda^2) P_{n-2} = 0. \tag{3}$$

7° Utilisant (1) et (3), justifier la relation :

$$P'_{n+1} = (n+2) P_n \tag{4}$$

et obtenir une relation (5), différentielle, linéaire, du second ordre, à coefficients non constants, vérifiée par P_n.

II

u désigne une fonction réelle, indéfiniment dérivable, de la variable réelle x; n est un entier positif. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(x^2 + \lambda^2) u'' - 2nxu' + (n+1) nu = 0. \tag{6}$$

1° Calculer la dérivée d'ordre k du premier membre (k entier supérieur à 2).

2° Du résultat obtenu pour $k = n$, tirer des conclusions concernant les solutions u de l'équation (6).

.../...

X 100 X
E.N.S.I. CHIMIE GROUPE SUD
1977

3° On admet que (6) a parmi ses solutions le polynôme P_n de la partie I. v étant une fonction réelle telle que : $u(x) = v(x)\,P_n(x)$, former l'équation différentielle (7), vérifiée par v dans son ensemble de définition, obtenue par substitution dans l'équation (6).

4° Pousser aussi loin que possible l'intégration de (7), et en déduire une expression (8) de l'intégrale générale de l'équation (6). La contradiction apparente, entre l'expression que l'on obtiendra ainsi, et les remarques que l'on aura pu faire en II. 2°, trouvera son explication dans la partie IV.

III

On appelle *fonction génératrice des* P_n la fonction réelle $f(t, x)$ définie par la série entière en t :

$$f(t, x) = P_0 + P_1(x)\,t + P_2(x)\,t^2 + \ldots + P_n(x)\,t^n + \ldots$$

On admettra provisoirement que cette série converge pour $|x| < M$, et $|t| < R$, M et R étant deux nombres réels positifs non nuls.

1° Calculer le produit :

$$\left(1 - 2xt + (x^2+\lambda^2)t^2\right) f(t, x)$$

en utilisant la relation (3) de la partie I.

2° **Montrer que :**

$$f(t, x) = \frac{1}{2i\lambda t}\left(\frac{1}{1 - xt - i\lambda t} - \frac{1}{1 - xt + i\lambda t}\right). \tag{9}$$

3° Supposant $|(x + i\lambda)\,t| < 1$, développer dans (9) chacune des fractions du crochet en série entière.

4° Donner une justification de l'expression suivante de P_n :

$$P_n(x) = \frac{1}{2i\lambda}\left((x+i\lambda)^{n+1} - (x-i\lambda)^{n+1}\right). \tag{10}$$

5° Calculer

$$P_n^2 - P_{n-1}\,P_{n+1}$$ (on trouvera une puissance de $(x^2+\lambda^2)$).

IV

On définit une nouvelle fonction z de la variable réelle x par :

$$z(x) = xy(x)$$

et on pose :

$$(x^2 + \lambda^2)^{n+1}\,z^{(n)}(x) = (-1)^n\,n!\,Q_{n+1}(x).$$

1° Montrer que, pour $n \geqslant 2$, z vérifie la même équation différentielle (2) que y.

2° Exprimer $z^{(n)}$ au moyen de $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$, et en déduire que :

$$Q_{n+1}(x) = x\,P_n(x) - (x^2+\lambda^2)\,P_{n-1}(x). \tag{11}$$

Montrer que l'on a aussi :

$$Q_{n+1} = P_{n+1} - x\,P_n. \tag{12}$$

3° Montrer que :

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left((x+i\lambda)^{n+1} + (x-i\lambda)^{n+1}\right). \tag{13}$$

4° Montrer que la relation (3) vérifiée par les P_n l'est aussi par les Q_n.

5° En dérivant (11) et (12), et utilisant (4) et (5), montrer que Q_{n+1} est une solution de (6).

Quelle est l'intégrale générale de (6)?

6° Montrer que :

$$Q'_{n+1}\,P_n - P'_n\,Q_{n+1} = (n+1)\,(P_n^2 - P_{n-1}\,P_{n+1}).$$

7° Utiliser III. 5° et IV. 6° pour achever la partie II, en calculant l'intégrale indéfinie :

$$\int^{x} \frac{(x^2+\lambda^2)^n}{\left(P_n(x)\right)^2}\,dx.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail